

DEVOIR SURVEILLÉ

1) Les questions 1) à 3) suivantes sont indépendantes.

1) Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$. b) $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n^\alpha + 1}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). c) $\sum (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n})$.

2) On admet que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ pour tout $x \in]-1, 1]$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k) - 1}{k} = \ln 2$.

3) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Montrer que la famille $\left(\frac{z^p}{p! q! (p+q+1)} \right)_{p,q \in \mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

2) Si vous avez une moyenne provisoire supérieure à 10/20 au deuxième semestre à l'écrit, sautez cet exercice. Les questions 1), 2) et 3) suivantes sont indépendantes.

- 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On choisit successivement avec remise k entiers dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Avec quelle probabilité deux d'entre eux sont-ils égaux ?
- 2) Soient X et Y deux variables aléatoires uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et R une variable de Rademacher. On suppose X, Y et R indépendantes. Calculer $P(Y = X + R)$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit un entier X dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée — si $X = 0$, on ne la lance pas! — et on note F le nombre de piles obtenus. Calculer l'espérance de F . Le résultat final est très simple !

3) Je préfère vous présenter ce problème avec la donnée initiale d'une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, mais vous ne manipulerez dans chaque question qu'un nombre fini variables. L'existence d'une telle suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ requiert une notion d'espace probabilisé plus générale que celle donnée en cours dans le cas fini, que vous découvrirez l'an prochain.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes. Ainsi, $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

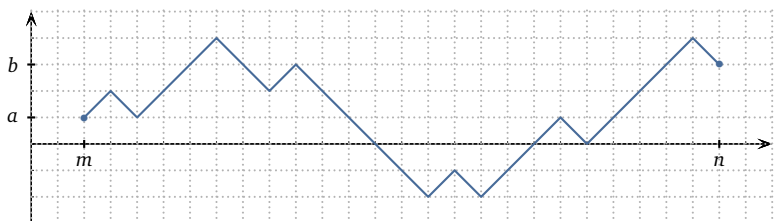
On admet la formule de Wallis : $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Partie A – Préliminaires

- 1) Que vaut $P(S_{2n+1} = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? Quelle est la loi de $\frac{X_k + 1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$? En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$.
- 2) a) Vérifier que $|k+1| + |k-1| = 2|k| + 2\delta_{k,0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $E(|S_{n+1}|) = E(|S_n|) + P(S_n = 0)$.
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $E(|S_{2n}|) = 2n P(S_{2n} = 0)$.
- 3) Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $m \leq n$ et $x, y \in \mathbb{Z}$: $P(S_m = x, S_n = y) = P(S_m = x)P(S_{n-m} = y - x)$.

Partie B – Retour à l'origine

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être vue comme la *marche aléatoire sur \mathbb{Z}* d'un point qui part de 0 et se déplace par sauts de 1 ou -1 donnés par la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mais on peut aussi la représenter dans le plan \mathbb{R}^2 en prenant l'axe des abscisses pour axe des temps. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $m \leq n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on appelle *chemin de (m, a) à (n, b)* toute famille de points $(m, y_m), (m+1, y_{m+1}), \dots, (n, y_n)$ pour laquelle $y_m = a, y_n = b$ et $y_{k+1} = y_k \pm 1$ pour tout $k \in \llbracket m, n-1 \rrbracket$.



4) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ des entiers pour lesquels $m \leq n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $C_{(m,a)}^{(n,b)}$ le nombre total de chemins possibles de (m, a) à (n, b) . Montrer que $C_{(m,a)}^{(n,b)} = \binom{n-m}{\frac{n-m+a-b}{2}}$.

5) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe autant de chemins de $(1, 1)$ à (n, k) qui touchent l'axe des abscisses que de chemins de $(1, -1)$ à (n, k) .

b) En déduire qu'il existe exactement $\frac{k}{n} C_{(0,0)}^{(n,k)}$ chemins de $(0, 0)$ à (n, k) qui ne touchent l'axe des abscisses qu'en $(0, 0)$.

c) En déduire que $P(S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0, S_n = k) = \frac{k}{n} P(S_n = k)$.

6) a) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}^*$: $P(S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0, S_n = k) = \frac{|k|}{n} P(S_n = k)$.

b) En déduire que $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que :

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.$$

En particulier, le probabilité que la marche aléatoire ne prenne pas la valeur 0 entre les instants 0 et n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C – Nombre d'entiers atteints

7) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

8) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et que $B_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

a) Montrer que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$, alors $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(B_n)$.

b) En déduire que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

On pose à présent $N_n = |\{S_0, \dots, S_n\}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, N_n est le nombre d'entiers que la marche aléatoire prend pour valeurs entre les instants 0 et n . On note par ailleurs E_k l'événement $\{S_k \notin \{S_0, \dots, S_{k-1}\}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

9) Montrer que $P(E_k) = P(S_1 \neq 0, \dots, S_k \neq 0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $E(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{8n}{\pi}}$.

Partie D – Tout entier est atteint presque sûrement !

On se donne une fois pour toutes un entier $a \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que $P(S_1 \neq a, \dots, S_n \neq a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = P(S_1 \neq a, \dots, S_n \neq a)$

et : $q_n = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0, S_1 \neq a, \dots, S_n \neq a)$.

10) Que vaut $P(S_a = a, S_{2a} = 0)$? En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n q_k \leq 1 - \frac{1}{2^{2a}}$.

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid S_k = 0\}$ si l'un des entiers S_1, \dots, S_n vaut 0 et $T_n = +\infty$ sinon.

a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $P(S_1 \neq a, \dots, S_n \neq a, T_n = k) = p_{n-k} q_k$.

b) En déduire que : $\left| p_n - \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k \right| \leq P(S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0)$.

12) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $a_\infty \in \mathbb{R}$. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, que la série $\sum u_n$ converge et que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_\infty$. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_{n-k} u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On gagnera à commencer par le cas où $a_\infty = 0$.

13) Montrer enfin que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Pourquoi le résultat reste-t-il vrai si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$?